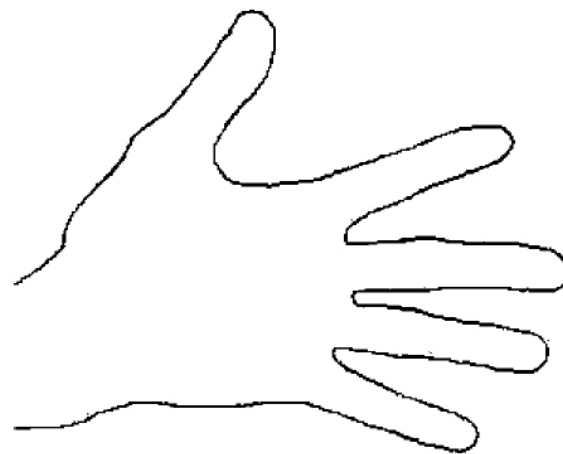


# **ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА R-ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ БИОМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ**

**М.А. Басараб, А.Б. Домрачева**

*МГТУ им. Н.Э. Баумана*

## Кисть руки как объект биометрической идентификации



# ОСНОВЫ ТЕОРИИ R-ФУНКЦИЙ

## *Обратная задача аналитической геометрии*

Для 2D области  $\Omega$  с границей  $\partial\Omega$  построить функцию  $\omega(x,y)$ , такую, что

- $\omega(x,y) > 0$  внутри  $\Omega$ ;
- $\omega(x,y) < 0$  снаружи  $\Omega$ ;
- $\omega(x,y) = 0$  на границе  $\partial\Omega$ .

Уравнение

$$\omega(x,y) = 0$$

определяет границу области  $\partial\Omega$  в неявной форме.

Пусть  $\Omega$  представлена в виде **комбинации** более **простых** областей  $\Omega_1, \dots, \Omega_m$  с помощью логических операций:

- « $\cap$ » (пересечение);
- « $\cup$ » (объединение);
- « $\neg$ » (дополнение).

То есть

$$\Omega = F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_m\}, \{\cap, \cup, \neg\}) \quad (1)$$

Пусть уравнения границ  $\Omega_1, \dots, \Omega_m$  известны:

$$\omega_i(x) = 0 \quad (i=1, \dots, m).$$

**Метод R-функций** (RFM) позволяет получить **аналитическое выражение** границы сложной области

$$\omega(x)=0$$

на основе ее теоретико-множественного описания.

**Функция  $f(x,y)$  называется R-функцией, соответствующей разбиению вещественной оси на интервалы  $(-\infty; 0)$  и  $[0; \infty)$ , если ее знак полностью определяется знаками ее аргументов  $x, y$ .**

## Соответствие между знаками R-операций и знаками аргументов

$x$	$y$	$x \wedge y$	$x \vee y$
—	—	—	—
—	+	—	+
+	—	—	+
+	+	+	+

## Система R-функций $\mathfrak{R}_\alpha$

$$\begin{aligned}x \wedge_\alpha y &\equiv \frac{1}{1+\alpha} \left( x + y - \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy} \right), \\x \vee_\alpha y &\equiv \frac{1}{1+\alpha} \left( x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy} \right), \\ \neg X &\equiv -X.\end{aligned} \tag{2}$$

где  $-1 < \alpha \leq 1$ .

При  $\alpha \equiv 0$  (система  $\mathfrak{R}_0$ )

$$\begin{aligned}x \wedge_0 y &\equiv x + y - \sqrt{x^2 + y^2}, \\x \vee_0 y &\equiv x + y + \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \neg X &\equiv -X,\end{aligned}\tag{3}$$

при  $\alpha \equiv 1$  (система  $\mathfrak{R}_1$ )

$$\begin{aligned}x \wedge_1 y &\equiv (x + y - |x - y|) / 2 \equiv \min(x, y), \\x \vee_1 y &\equiv (x + y + |x - y|) / 2 \equiv \max(x, y), \\ \neg X &\equiv -X.\end{aligned}\tag{4}$$





Соответствие между булевыми функциями и  $R$ -functions позволяет найти решение **обратной задачи аналитической геометрии**.

Заменяем формально в (1)

$$\Omega = F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_m\}, \{\cap, \cup, \neg\})$$

- $\Omega$  на  $\omega(x, y)$ ;
- $\Omega_i$  на  $\omega_i(x, y)$  ( $i=1, \dots, m$ );
- символы  $\{\cap, \cup, \neg\}$  на символы  $R$ -операций  $\{\wedge, \vee, \neg\}$  системы  $\mathcal{R}_\alpha$ .

В результате получим аналитическое выражение как суперпозицию элементарных функций, определяющее уравнение границы области  $\Omega$ ,

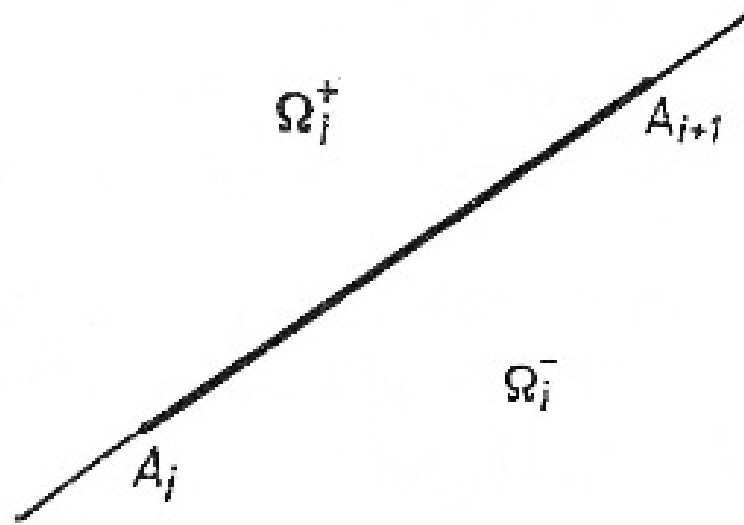
$$\omega(x,y)=0. \quad (5)$$

Причем,

$\omega(x,y)>0$  внутри  $\Omega$ ,

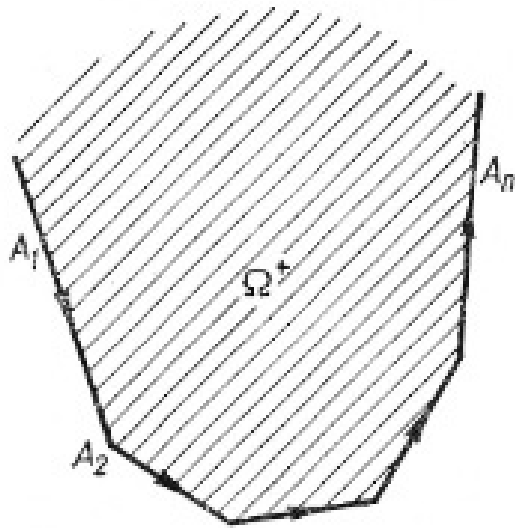
$\omega(x)<0$  за пределами  $\Omega$ .

Нормальное уравнение прямой,  
проходящей через 2 точки  $A_i(x_i, y_i)$ ,  $A_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$

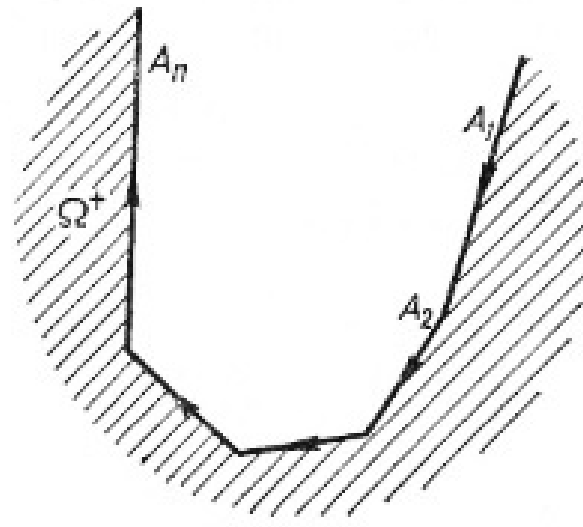


$$\omega(x, y) = \frac{-x(y_{i+1} - y_i) + y(x_{i+1} - x_i) - x_{i+1}y_i + x_i y_{i+1}}{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}} = 0$$

# Схема дальнейшего построения уравнения невыпуклого объекта



а

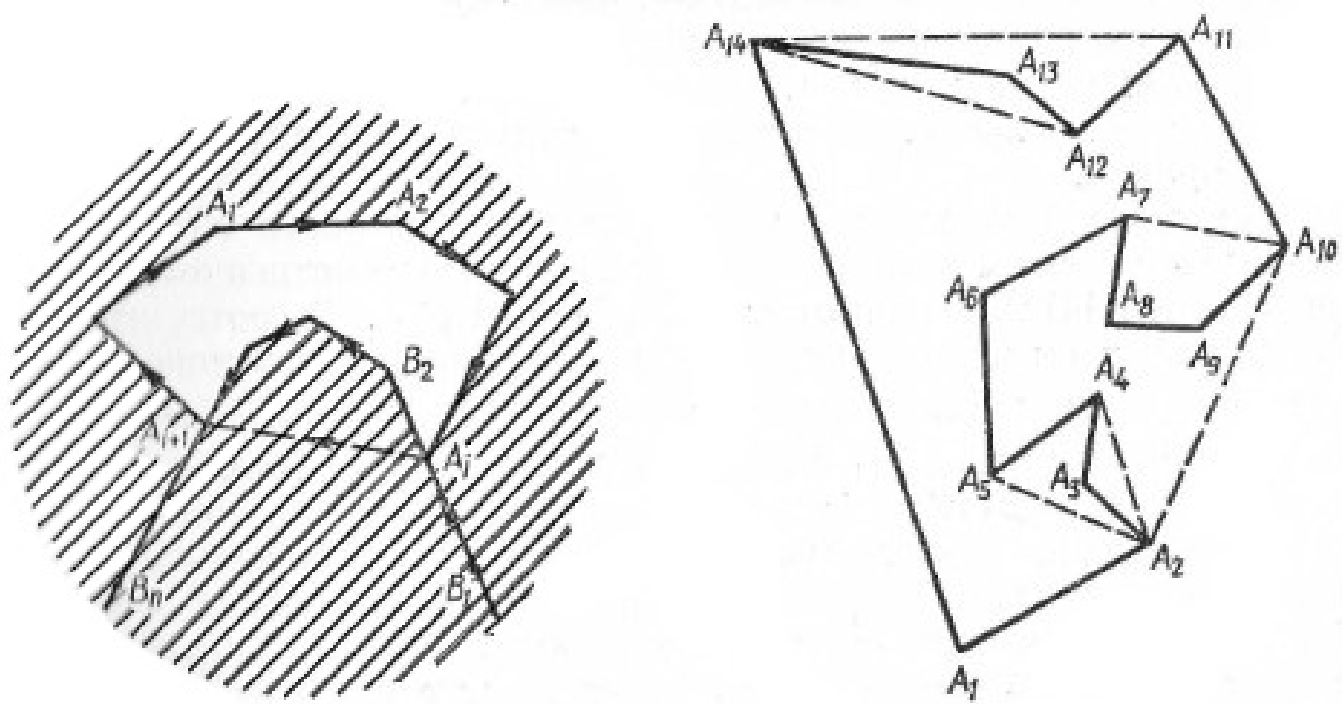


б

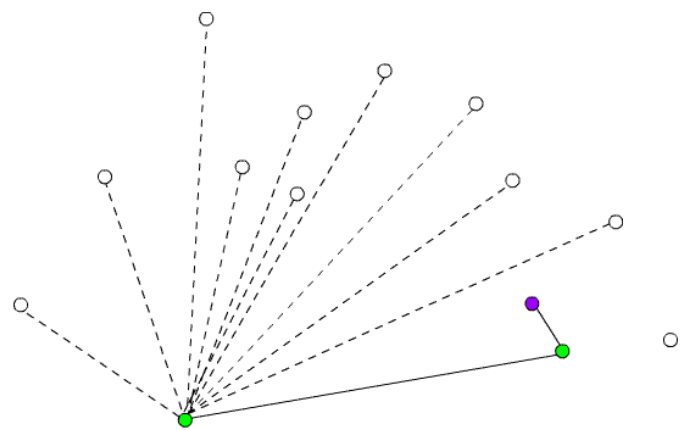
$$A_1 A_2 \wedge A_2 A_3 \wedge \dots \wedge A_{n-1} A_n$$

$$A_1 A_2 \vee A_2 A_3 \vee \dots \vee A_{n-1} A_n$$

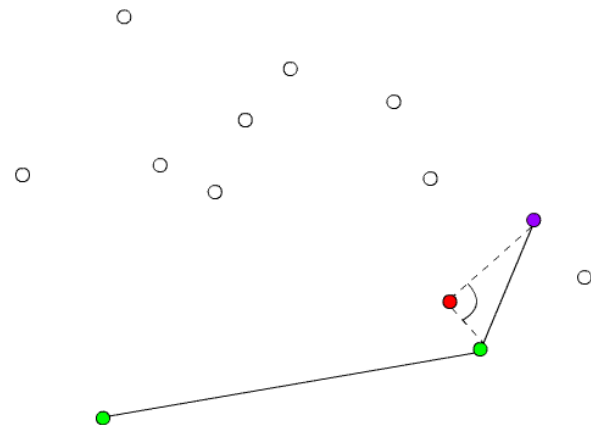
# Процедура выпуклого дополнения многоугольной области



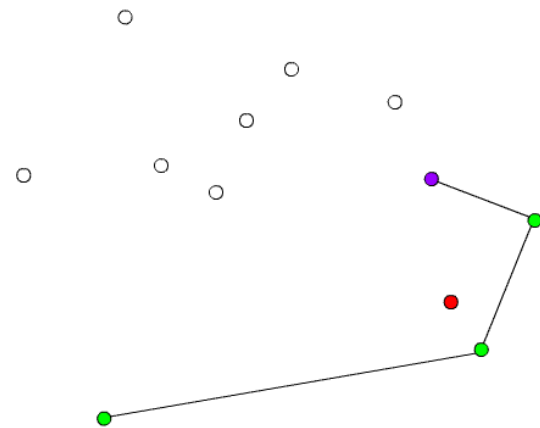
# Алгоритм Грэхема построения выпуклой оболочки



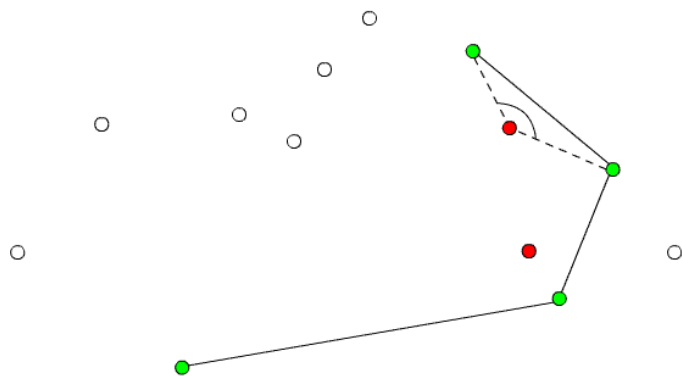
1



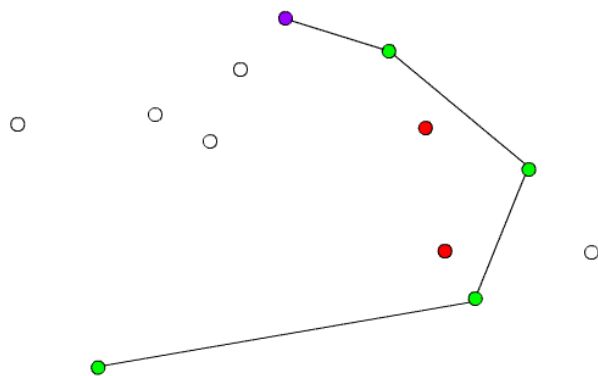
2



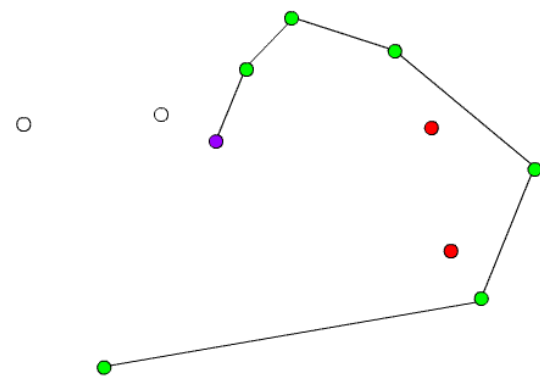
3



4

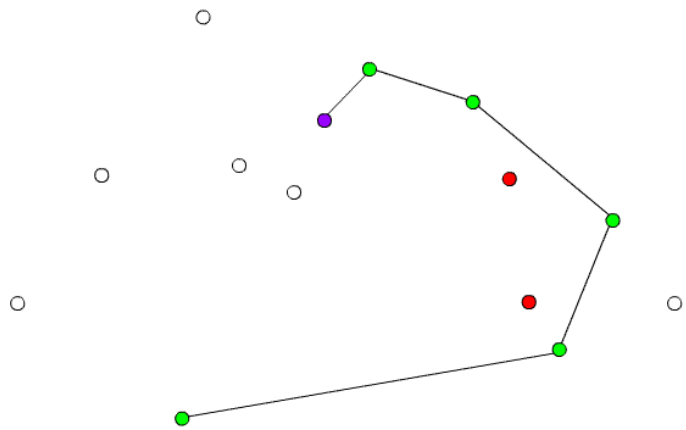


5

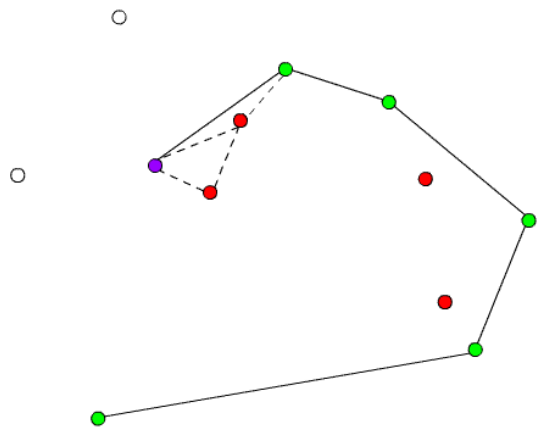


6

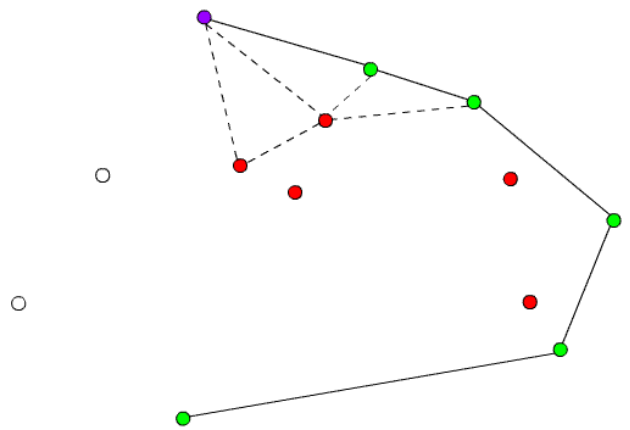




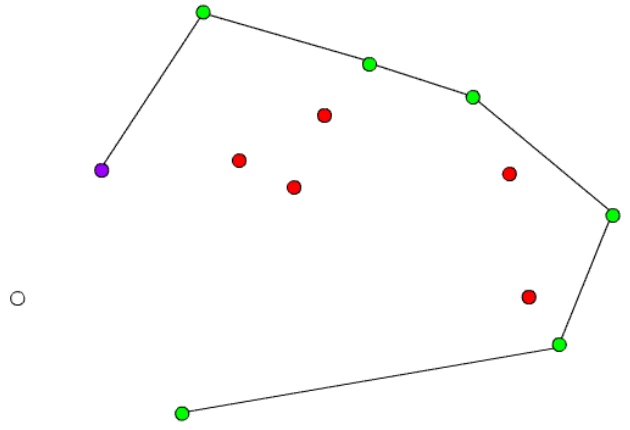
7



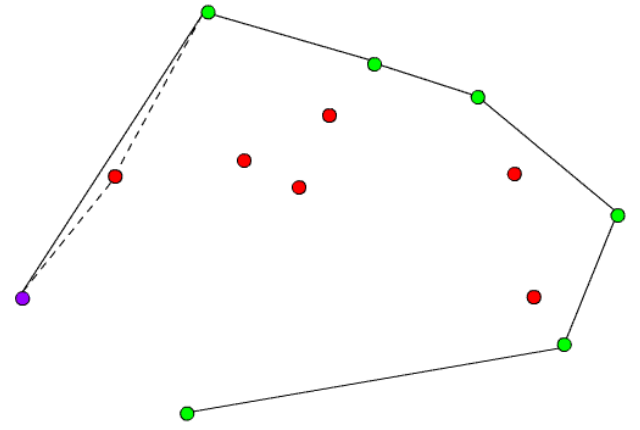
8



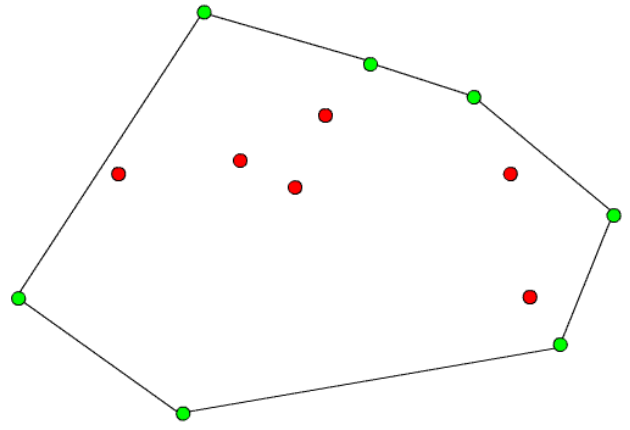
9



10

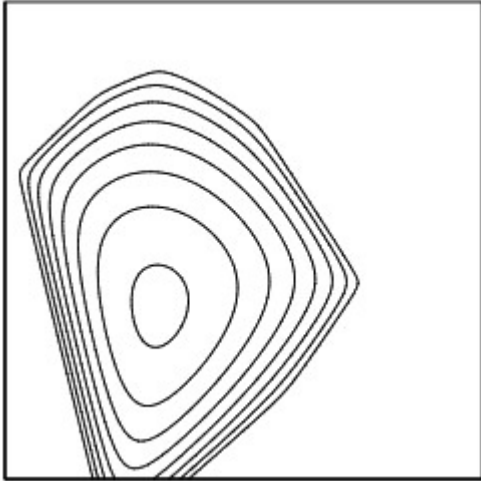


11

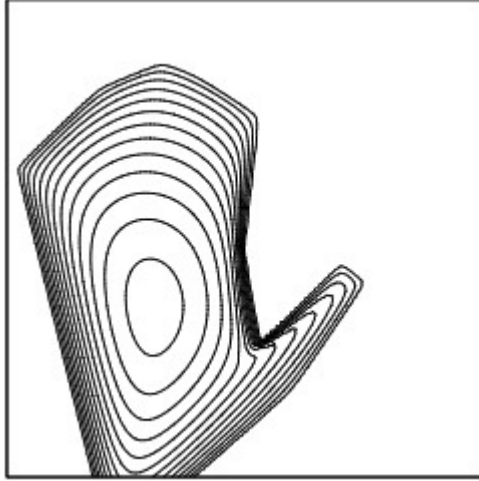


12

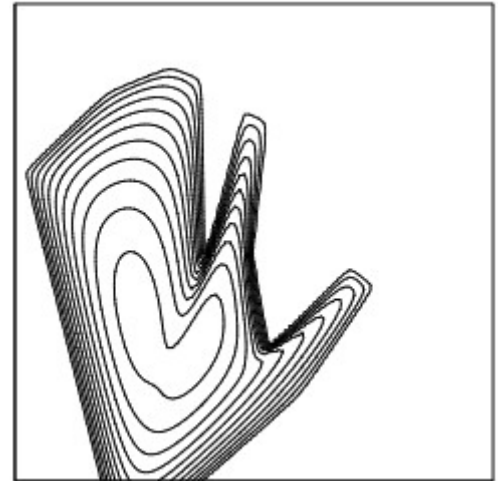
## Фазы построения уравнения кисти руки



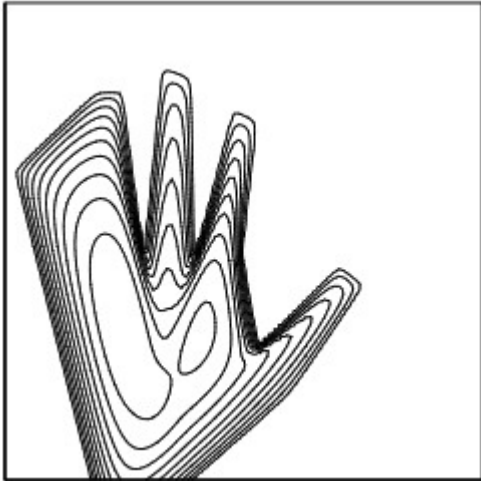
1



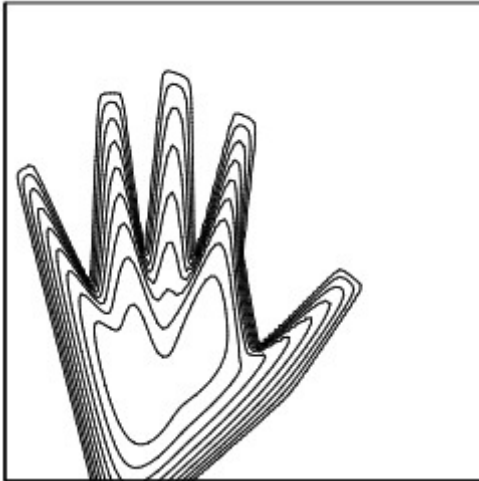
2



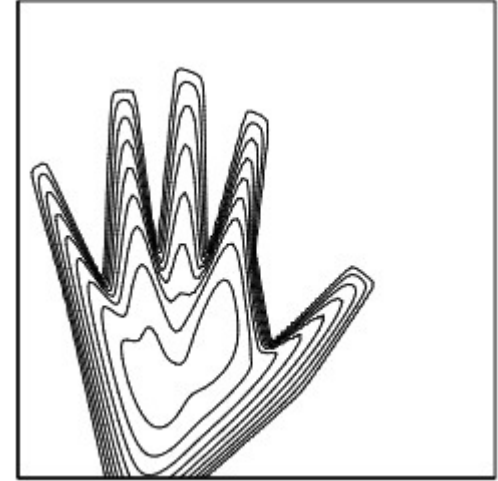
3



4

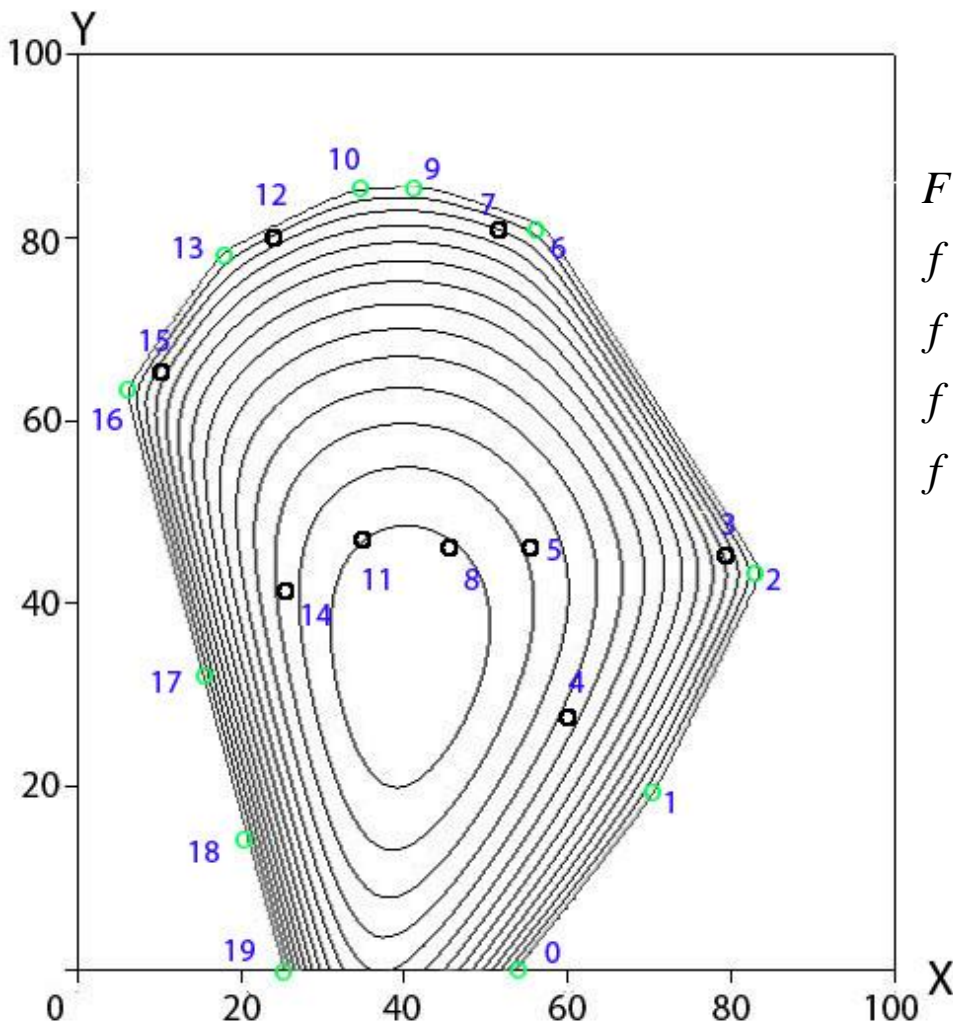


5



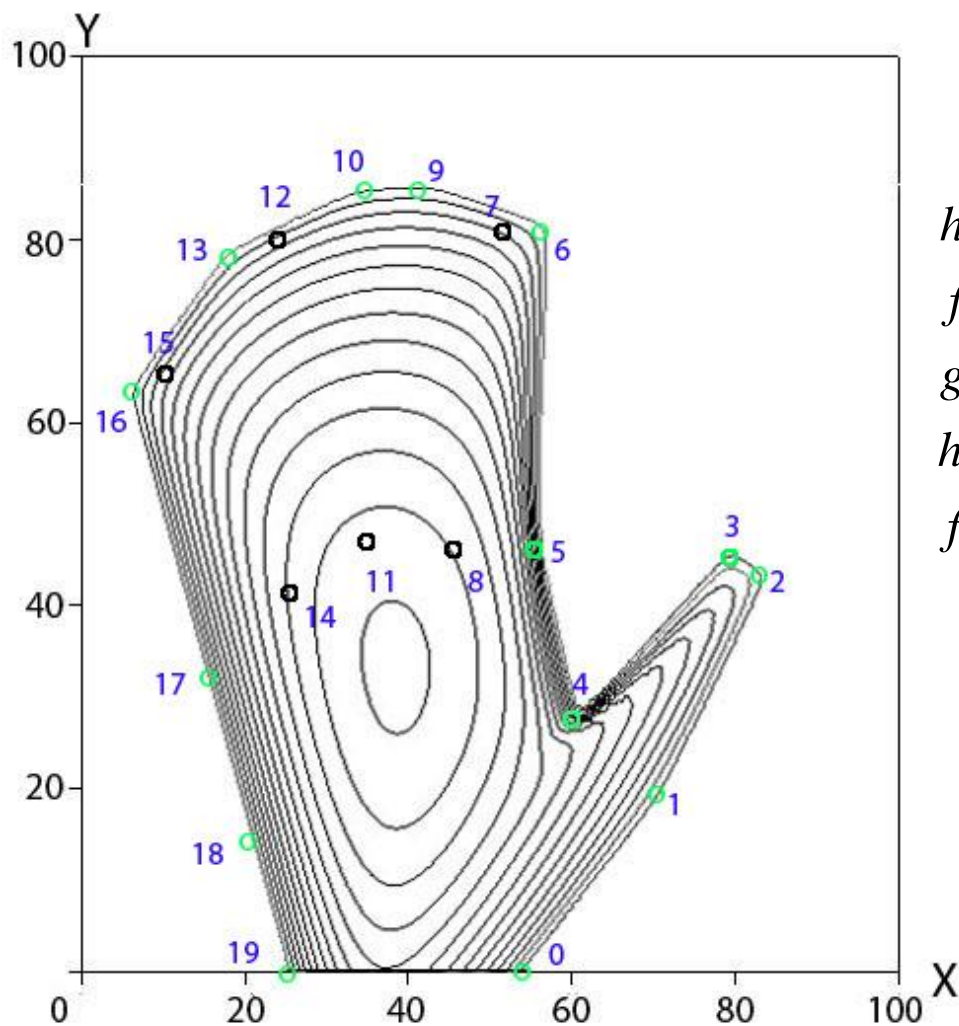
6

# Автоматизированное построение контура



$$F_0(x, y) = \wedge(\wedge(\wedge(\wedge(\wedge(\wedge(\wedge(f(x, y, X_0, Y_0, X_1, Y_1), \\ f(x, y, X_1, Y_1, X_2, Y_2)), f(x, y, X_2, Y_2, X_6, Y_6)), \\ f(x, y, X_6, Y_6, X_9, Y_9)), f(x, y, X_9, Y_9, X_{10}, Y_{10})), \\ f(x, y, X_{10}, Y_{10}, X_{13}, Y_{13})), f(x, y, X_{13}, Y_{13}, X_{16}, Y_{16})), \\ f(x, y, X_{16}, Y_{16}, X_{19}, Y_{19}))$$

# Автоматизированное построение контура



$$h2\_4(x, y) = \wedge(f(x, y, X_2, Y_2, X_3, Y_3),$$

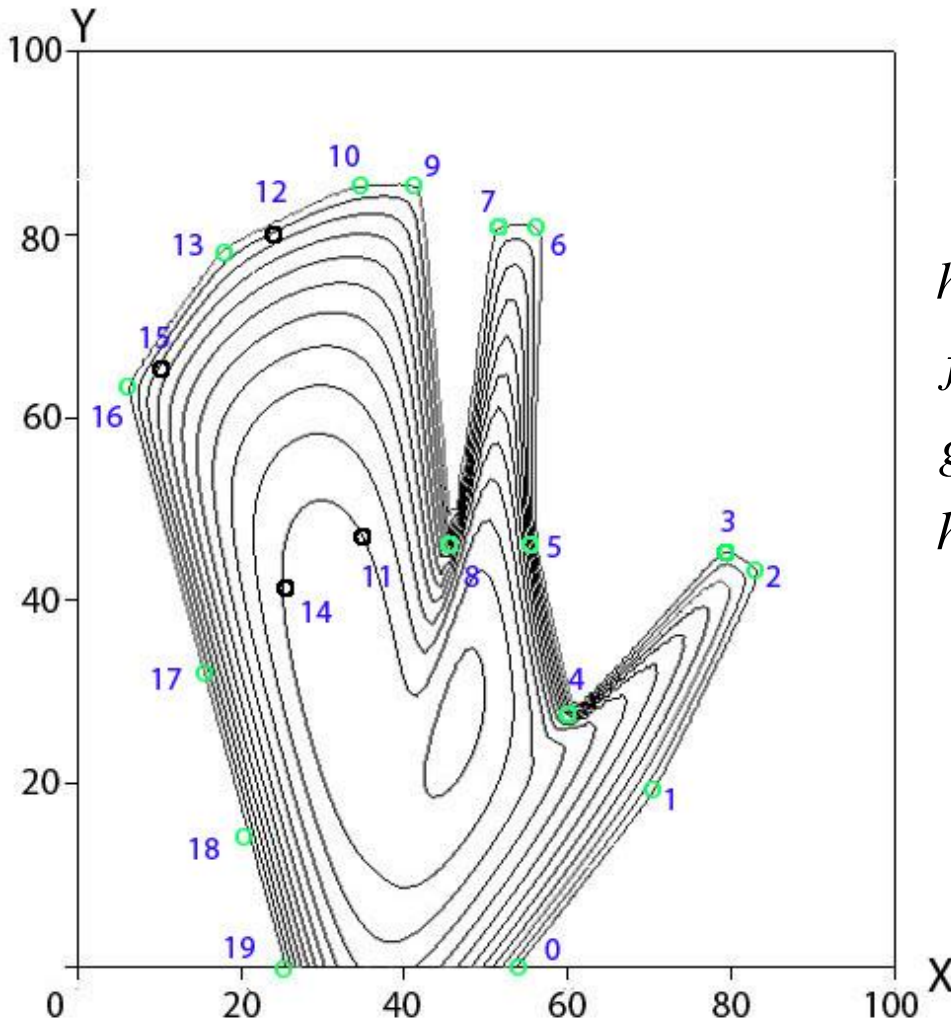
$$f(x, y, X_3, Y_3, X_4, Y_4))$$

$$g2\_6(x, y) = \vee(\vee(\vee(f(x, y, X_2, Y_2, X_4, Y_4),$$

$$h2\_4(x, y)), f(x, y, X_4, Y_4, X_5, Y_5)),$$

$$f(x, y, X_5, Y_5, X_6, Y_6))$$

# Автоматизированное построение контура



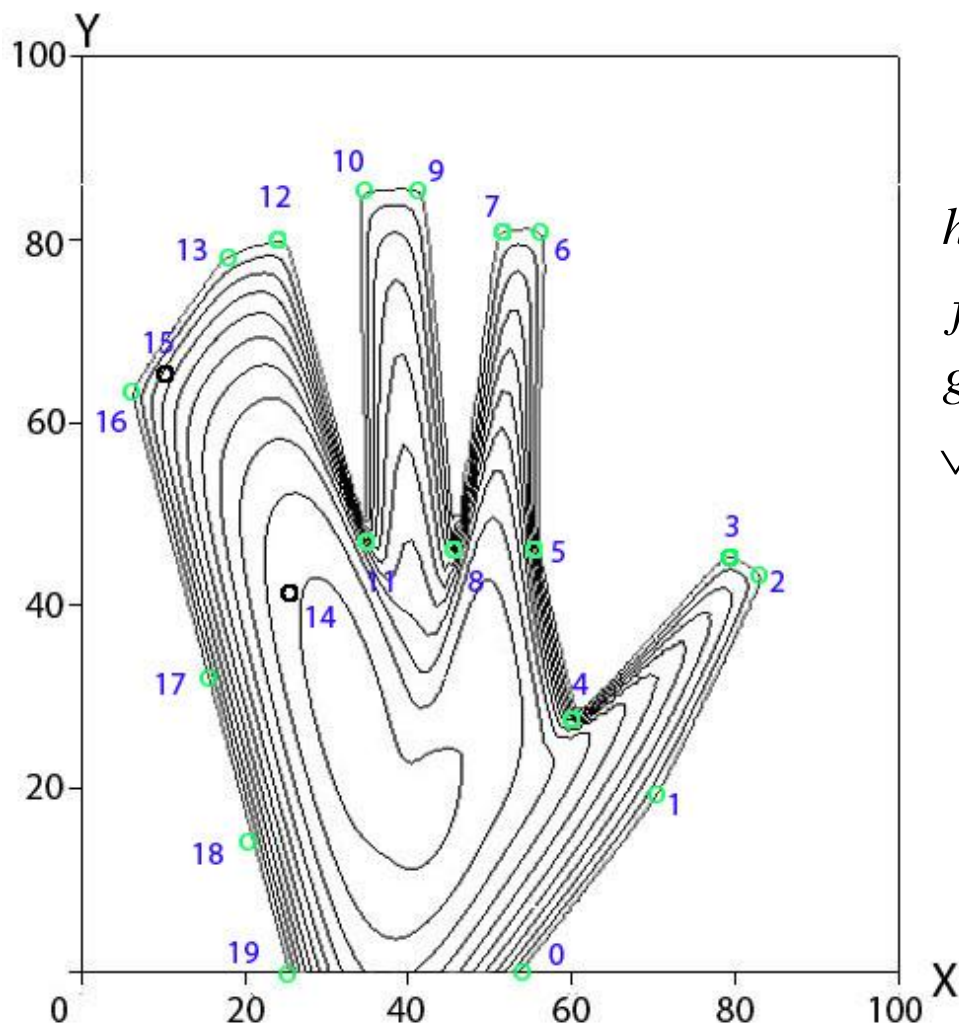
$$h6\_8(x, y) = \wedge(f(x, y, X_6, Y_6, X_7, Y_7),$$

$$f(x, y, X_7, Y_7, X_8, Y_8))$$

$$g6\_9(x, y) = \vee(\vee(f(x, y, X_6, Y_6, X_8, Y_8),$$

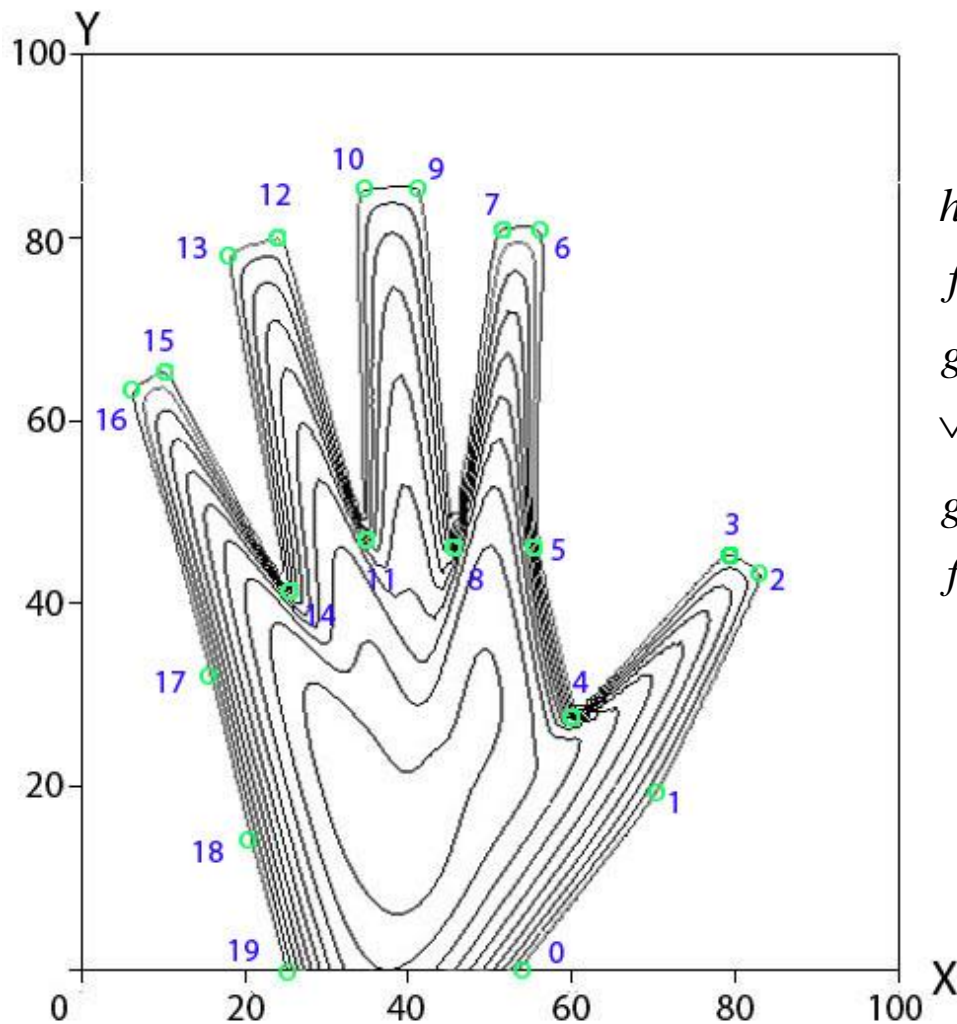
$$h6\_8(x, y)), f(x, y, X_8, Y_8, X_9, Y_9))$$

# Автоматизированное построение контура



$$h_{11\_13}(x, y) = \wedge(f(x, y, X_{11}, Y_{11}, X_{12}, Y_{12}),$$
$$f(x, y, X_{12}, Y_{12}, X_{13}, Y_{13}))$$
$$g_{10\_13}(x, y) = \vee(f(x, y, X_{10}, Y_{10}, X_{11}, Y_{11}),$$
$$\vee(f(x, y, X_{11}, Y_{11}, X_{13}, Y_{13}), h_{11\_13}(x, y)))$$

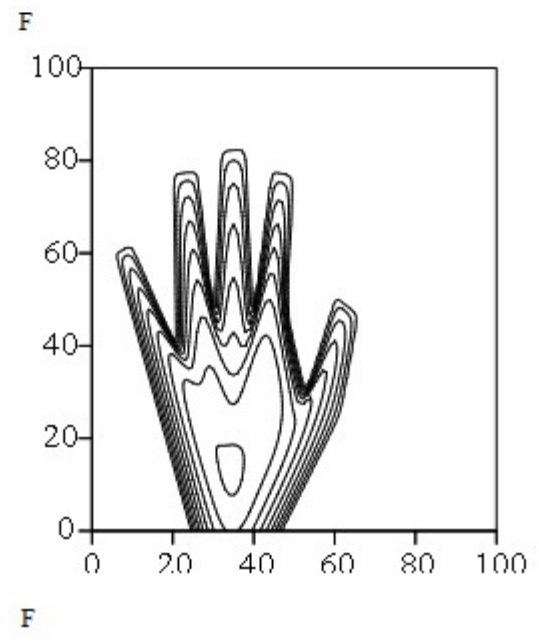
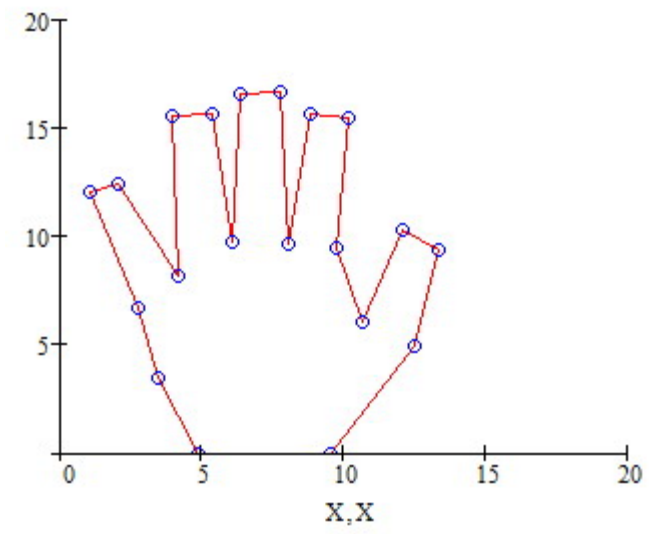
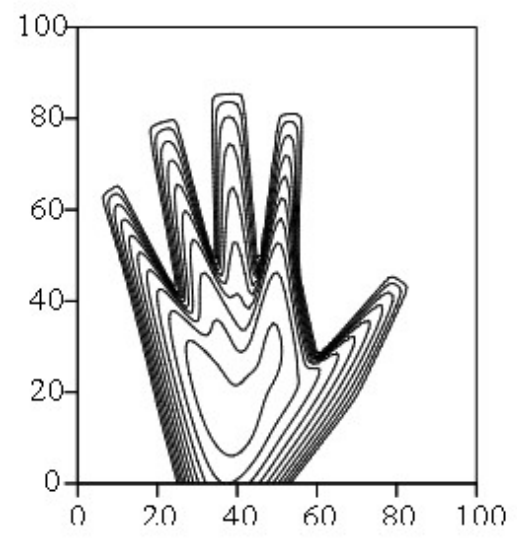
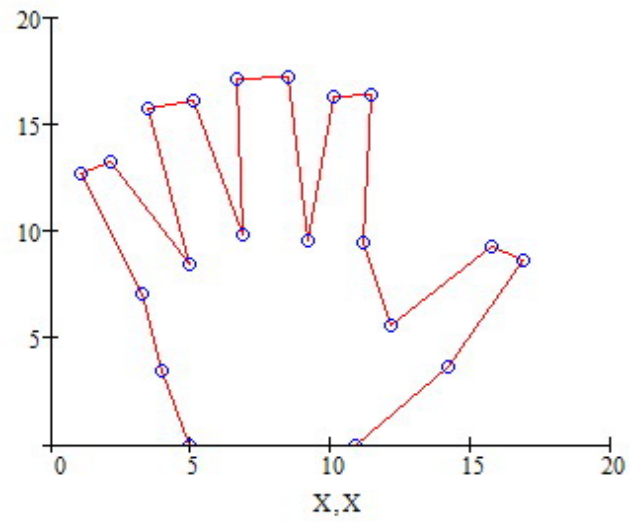
# Автоматизированное построение контура

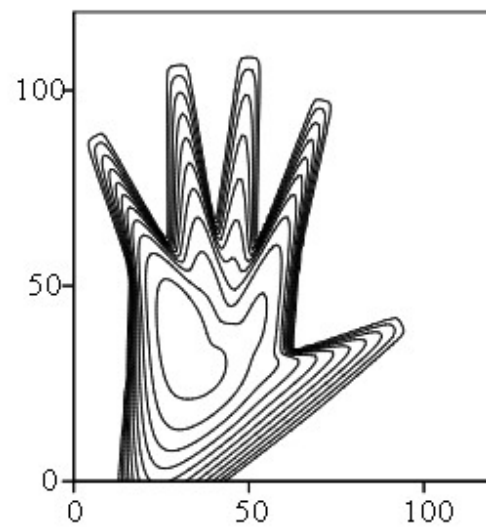
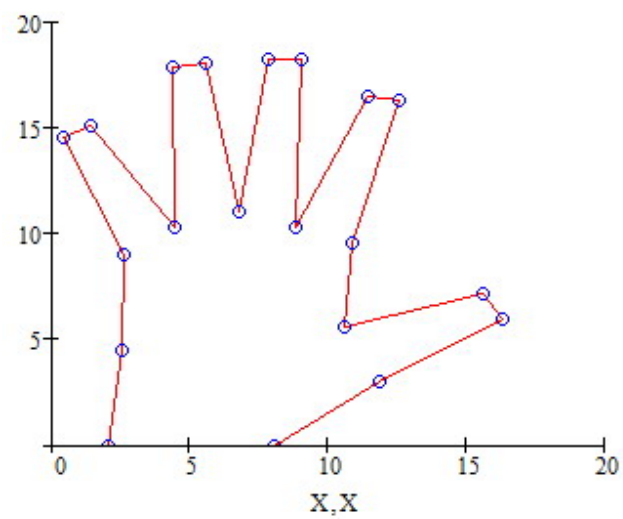


$$h_{14\_16}(x, y) = \wedge(f(x, y, X_{14}, Y_{14}, X_{15}, Y_{15}),$$
$$f(x, y, X_{15}, Y_{15}, X_{16}, Y_{16}))$$
$$g_{13\_16} = \vee(f(x, y, X_{13}, Y_{13}, X_{14}, Y_{14}),$$
$$\vee(f(x, y, X_{14}, Y_{14}, X_{16}, Y_{16}), h_{14\_16}(x, y)))$$
$$g_{16\_19}(x, y) = \vee(\vee(f(x, y, X_{16}, Y_{16}, X_{17}, Y_{17}),$$
$$f(x, y, X_{17}, Y_{17}, X_{18}, Y_{18})), f(x, y, X_{18}, Y_{18}, X_{19}, Y_{19}))$$

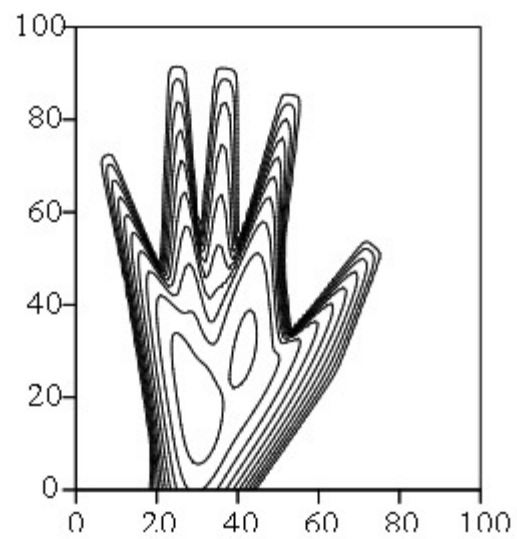
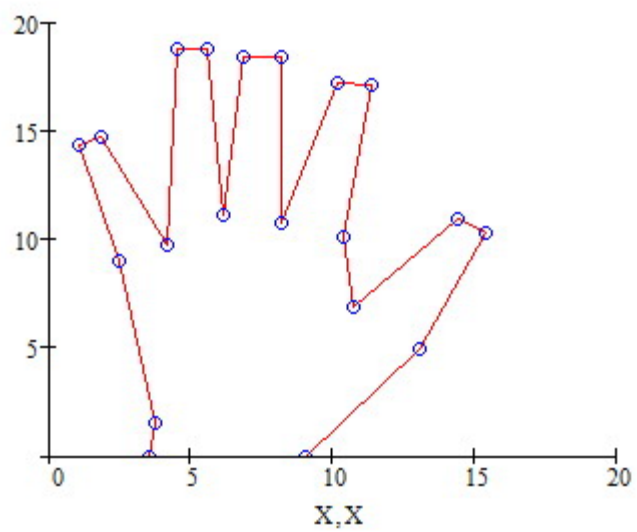


**Примеры контуров кистей рук и  
поверхности, построенные с помощью RFM  
(20 точек контура)**

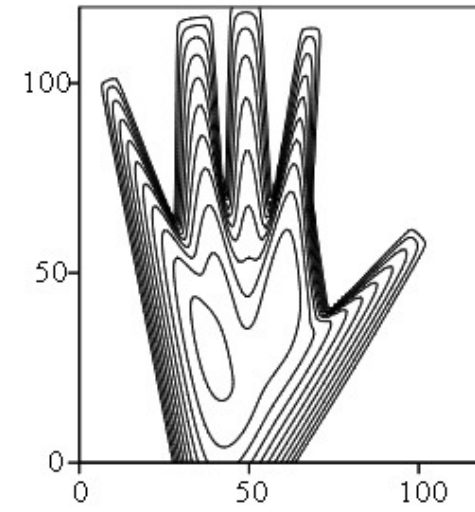
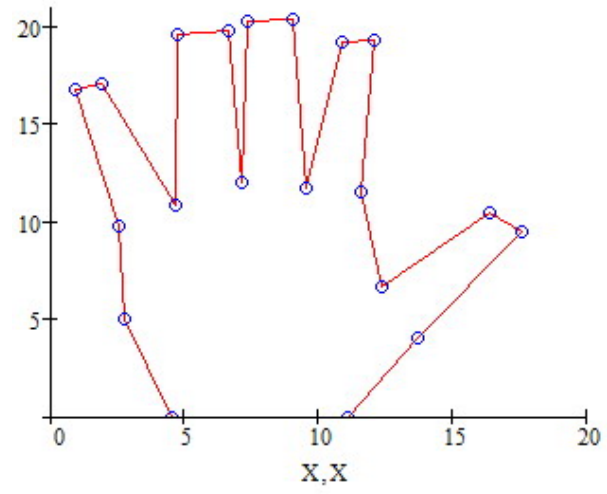




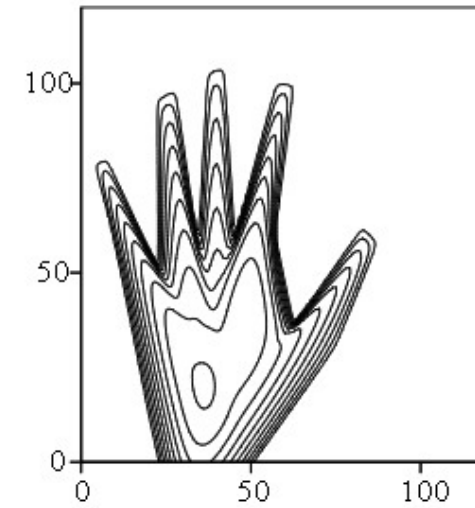
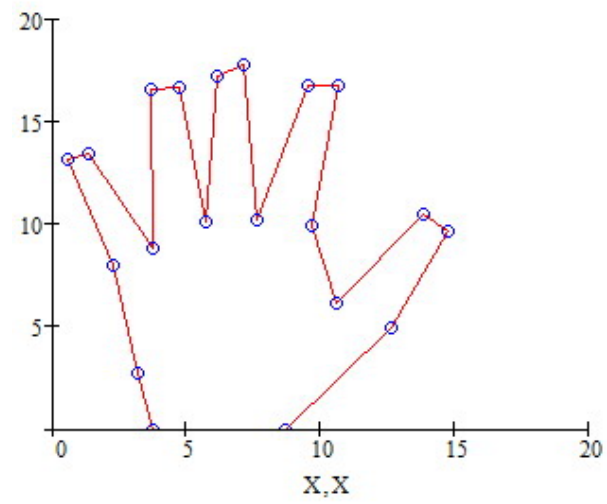
F



F

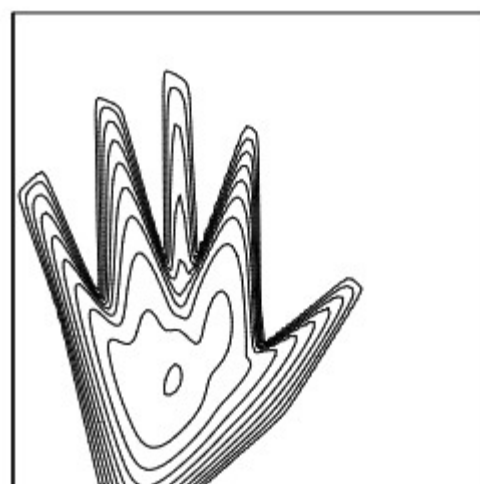
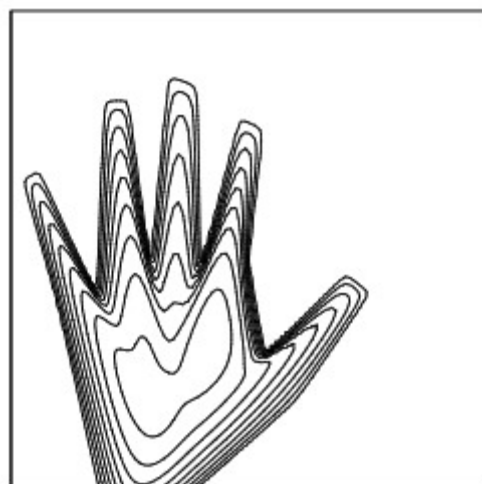
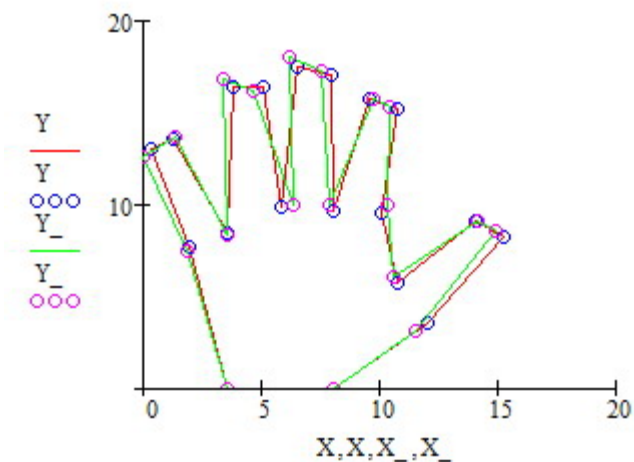


F

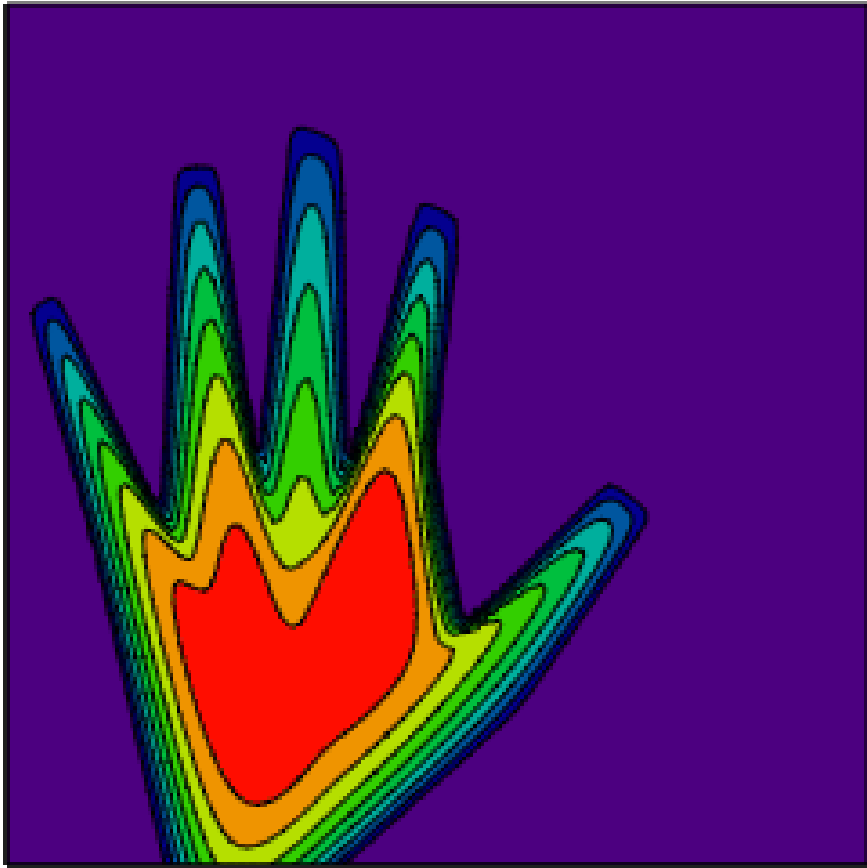


F

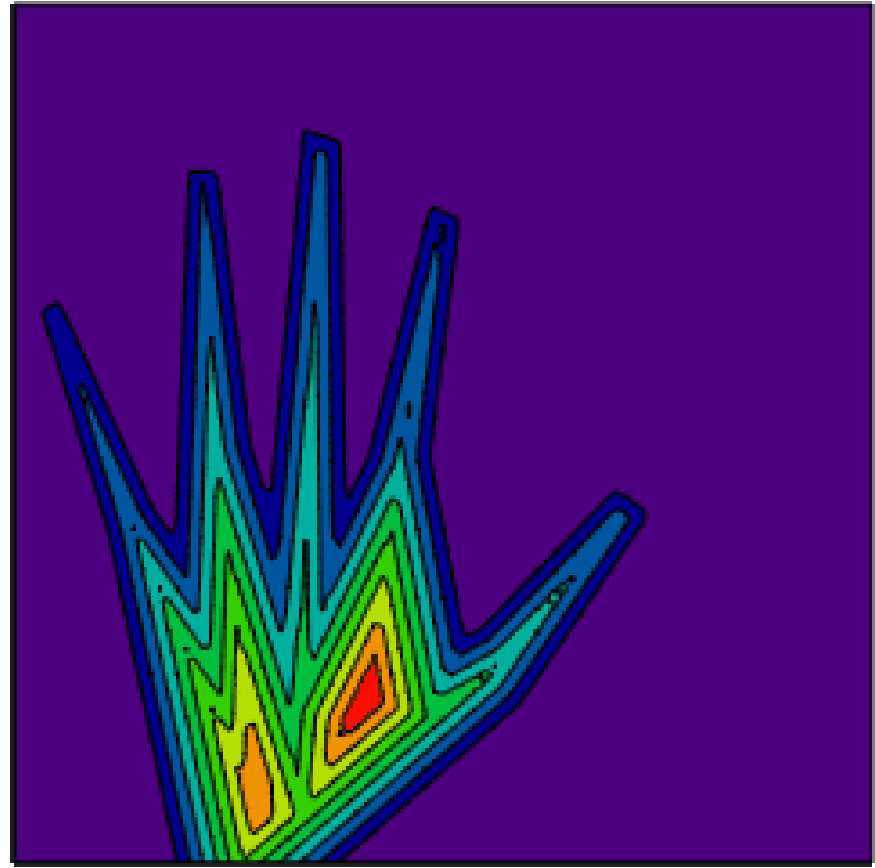
# Пример моделирования искаженного контура кисти



# Различные варианты R-операций



F



F

# Автоматизированное построение контура

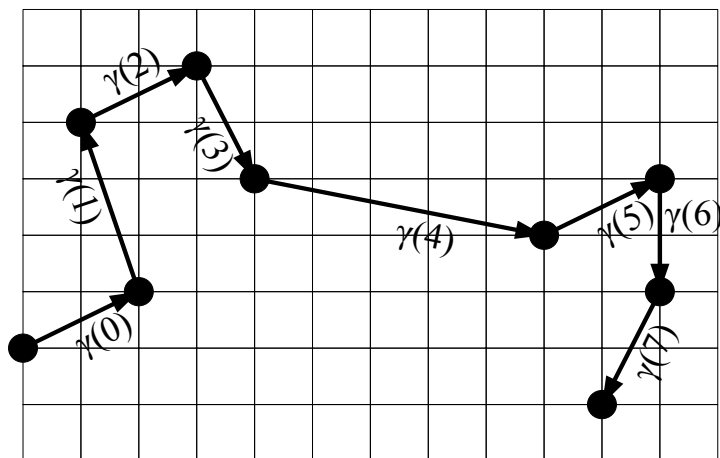
*Методы обработки ГТО:*

- ❖ с помощью образа в виде изображения, отражающего пространственные взаимоотношения между точками;
- ❖ сопоставление ГТО ориентированного графа или пучка радиус-векторов.



# Задание ГТО в виде комплексного сигнала

Точечные объекты соединяются друг с другом последовательно в определенном порядке элементарными векторами:



Контур можно рассматривать в качестве комплекснозначных сигналов, содержащих информацию о множестве точечных объектов.

Мерой схожести двух комплекснозначных сигналов может служить их *скалярное произведение*. Для двух контуров:

$$A = \{\gamma(n)\}_{0,k-1}, \gamma(n) = \gamma_1(n) + i\gamma_2(n) ;$$

$$N = \{\nu(n)\}_{0,k-1}, \nu(n) = \nu_1(n) + i\nu_2(n)$$

скалярное произведение в действительном и комплексном пространствах задается:

$$(N, A)_{E^{2k}} = \sum_{n=0}^{k-1} [\gamma_1(n)\nu_1(n) + \gamma_2(n)\nu_2(n)] ;$$

$$(N, A)_{c^k} = (N, A)_{E^{2k}} + i \sum_{n=0}^{k-1} [\gamma_2(n)\nu_1(n) - \gamma_1(n)\nu_2(n)]$$

где  $k$  – число векторов:  $\gamma(n) = \gamma_1(n) + i\gamma_2(n) ;$

$$\nu(n) = \nu_1(n) + i\nu_2(n) .$$