

Конференция РусКрипто-2018

Протокол SIKE и его устойчивость к классическим и квантовым атакам

Олег Тараскин,
gost2001@gmail.com
компания «Актив»

Квантовая сложность

- Факторизация n -битного модуля RSA:

$\sim 2n$ кубит, $4n^3$ операций

- ECDLP для кривых над $GF(p)$:

$\sim 6n$ кубит, $360n^3$ операций

(Пример: для ГОСТ Р 34.10-2012 — 1536 и 3072 кубит)

Shor's discrete logarithm quantum algorithm for elliptic curves, John Proos and Christof Zalka, 2008

Последние достижения в квантовых вычислениях:

Июль 2017: 51 кубит в связанном состоянии
(проф. Михаил Лукин, Гарвард)

Ноябрь 2017: создан прототип 50 кубитного процессора
(Dario Jil, IBM)

Наиболее значимые результаты

- 2006:

“Public-Key Cryptosystem Based on Isogenies”

Alexander Rostovtsev, Anton Stolbunov

- 2010:

Constructing elliptic curve isogenies in quantum subexponential time

Andrew M. Childs, David Jao , Vladimir Soukharev

- 2011:

“Towards Quantum-Resistant Cryptosystems from Supersingular Elliptic Curve Isogenies”

David Jao, Luca De Feo

Эллиптические кривые

$GF(p^n)$, p - характеристика

для $p > 3$ сокращенная форма Вейерштрасса :

$$y^2 = x^3 + Ax + B$$

(где $4A^3 + 27B^2 \neq 0$)

j -инвариант кривой E :

$$j(E) = 1728 \frac{4A^3}{4A^3 + 27B^2}$$

У изоморфных кривых над одним полем j -инварианты равны.

Изогении

Пусть E_1 и E_2 эллиптические кривые над полем F

Изогией $E_1 \rightarrow E_2$ над F называется неконстантное рациональное отображение над F , которое также является групповым гомоморфизмом

$$(x, y) \rightarrow \left(\frac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)}, \frac{g_1(x,y)}{g_2(x,y)} \right), \quad \text{где } f_1, f_2, g_1, g_2 \text{ – полиномы}$$

Степенью изогагии называется степень рационального отображения

Теорема Tate :

Две кривые над одним полем изогенны тогда и только тогда, когда порядки их групп равны

Пример

$$F = \text{GF}(19), \quad E1: y^2 = x^3 + x + 1$$

$$E2: y^2 = x^3 + 4x + 13$$

$$\#E1 = \#E2 = 21$$

$$(x, y) \longrightarrow \left(\frac{x^3 - 4x^2 - 8x - 8}{x^2 - 4x + 4}, \frac{x^3y - 6x^2y + 5xy - 6y}{x^3 - 6x^2 - 7x - 8} \right)$$

Степень изогении = 3

Пример

Выберем точки $A_1 (9, 6)$ и $B_1 (14, 2)$ E_1

$$C_1 = A_1 + B_1$$

Изогения на E_2 :

$$A_1 (9, 6) \rightarrow A_2 (14, 1)$$

$$B_1 (14, 2) \rightarrow B_2 (17, 4)$$

$$C_1 (5, 6) \rightarrow C_2 (8, 5)$$

Легко проверить на кривой E_2 что $A_2 + B_2 = C_2$

Изогении

Эндоморфизм – это изогения кривой на саму себя.

Пример: Скалярное умножение точки на число n

Для $n = 2$:

$$2 * P = \left(\frac{x^4 - 2Ax^2 - 8Bx - A^2}{4(x^3 + Ax + B)}, \frac{(x^6 + 5Ax^4 + 20Bx^3 - 5A^2x^2 - 4ABx - 8B - A)y}{8(x^3 + Ax + B)^2} \right)$$

Для произвольного n аналогичная (но более длинная) формула может быть получена рекуррентно при помощи так называемых полиномов деления (division polynomials)

Алгоритм Velu (1971)

Вход:

кривая $y^2 = x^3 + Ax + B$, подгруппа C (ядро изогении)

Выход:

изогенная кривая $y^2 = x^3 + A'x + B'$

и рациональное отображение $(x, y) \longrightarrow \left(\frac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)}, \frac{g_1(x,y)}{g_2(x,y)} \right)$

Сложность : $O(\text{порядок } C)$

Алгоритм Velu

1. Отбрасываем точку на бесконечности
2. C_2 - мн-во точек четного порядка из C , R все остальные
3. Разбиваем R на две части R_+ и R_- : если точка P – в R_+ то обратная ей – в R_-
4. Мн-во $S = C_2 \cup R_+$

Алгоритм Velu

Для каждой точки $Q = (x_Q, y_Q) \in S$:

$$g_Q^x = 3x_Q^2 + A$$

$$g_Q^y = -2y_Q$$

$$v_Q = \begin{cases} g_Q^x & \text{если } Q = -Q \\ 2g_Q^x, & \text{если } Q \neq -Q \end{cases}$$

$$u_Q = (g_Q^y)^2$$

$$v = \sum_{Q \in S} (v_Q) , w = \sum_{Q \in S} (u_Q + x_Q v_Q)$$

Коэфф. Уравнения изогенной кривой E' : $A' = A - 5v$, $B' = B - 7w$

Алгоритм Velu

Отображение :

$$(x, y) \longrightarrow (\alpha, \beta)$$

$$\alpha = x + \sum_{Q \in S} \left(\frac{v_Q}{x - x_Q} - \frac{u_Q}{(x - x_Q)^2} \right)$$

$$\beta = y + \sum_{Q \in S} \left(u_Q \frac{2y}{(x - x_Q)^3} - v_Q \frac{y - y_Q}{(x - x_Q)^2} - \frac{g_Q^x g_Q^y}{(x - x_Q)^2} \right)$$

Сложная задача вычисления изогений

Даны две кривые E_1 и E_2 одинакового порядка над одним полем.

Требуется найти изогению $(x, y) \rightarrow \left(\frac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)}, \frac{g_1(x,y)}{g_2(x,y)} \right)$ между ними

Вычисление изогений степени l^e

Пусть P – точка порядка l^e . Необходимо подсчитать изогению φ :
 $E \rightarrow E / \langle P \rangle$

Разложим φ на $\varphi_{e-1} * \varphi_{e-2} * \dots * \varphi_0$,

$$\varphi_0 = E, \quad P_0 = P$$

$$\varphi_i: E_i \rightarrow E_{i+1}, \quad E_{i+1} = E_i / \langle l^{e-i-1} * P_i \rangle, \quad P_{i+1} = \varphi(P_i)$$

Т.е. вычисление изогении степени l^e требует $e - 1$ шагов с использованием Velu

и скалярным умножением точки на число l

Пример для l^5

Пусть имеется точка P порядка l^5

Требуется вычислить изогению $E \rightarrow E / \langle P \rangle$

Метод 1 : Подать на вход алгоритма Velu точку P , выполнить $\sim \frac{l^5}{2}$ шагов и получить $E / \langle P \rangle$

Метод 2 :

$$\varphi = \varphi_4 * \varphi_3 * \varphi_2 * \varphi_1 * \varphi_0$$

$$\varphi_0 = E_0 \rightarrow E_0 / \langle l^4 * P \rangle \quad P_1 = \varphi_0(P)$$

$$\varphi_1 = E_1 \rightarrow E_1 / \langle l^3 * P_1 \rangle \quad P_2 = \varphi_0(P_1)$$

$$\varphi_2 = E_2 \rightarrow E_2 / \langle l^2 * P_2 \rangle \quad P_3 = \varphi_0(P_2)$$

$$\varphi_3 = E_3 \rightarrow E_3 / \langle l * P_3 \rangle \quad P_4 = \varphi_0(P_3)$$

$$\varphi_4 = E_4 \rightarrow E_4 / \langle P_4 \rangle$$

Суперсингулярные эллиптические кривые

Порядок группы точек кривой E :

$$\#E(\text{GF}(p^n)) = p^n + 1 - t \quad t - \text{след Фробениуса}$$

Если $t \equiv 0 \pmod{p}$ \rightarrow E – суперсингулярная кривая, иначе – обычная.

MOV – атака: у суперсингулярных кривых задача ECDLP для кривой $E(\text{GF}(p^n))$ сводится к решению DLP над полем $\text{GF}(p^{n*k})$, где k – небольшое натуральное число.

Суперсингулярные кривые «гладкого» порядка можно использовать в криптосистемах с изогениями.

Выбор типа поля суперсингулярных кривых

Поле число j - инвариантов

$$\text{GF}(p) \quad \sim p^{1/2}$$

$$\text{GF}(p^n) \quad \sim \frac{p}{12}$$

Граф изогений суперсингулярных кривых

Граф изогений представляет собой правильный граф.

Существует $l + 1$ изогений эллиптических кривых степени l в расширении поля K

Граф изогений суперсингулярных кривых

Пример (пример и изображения графов — Dr. Fre Vercauteren):

$$P = 241$$

число J-инвариантов : $\#J\text{-inv} = 20 \ (\sim P/12)$

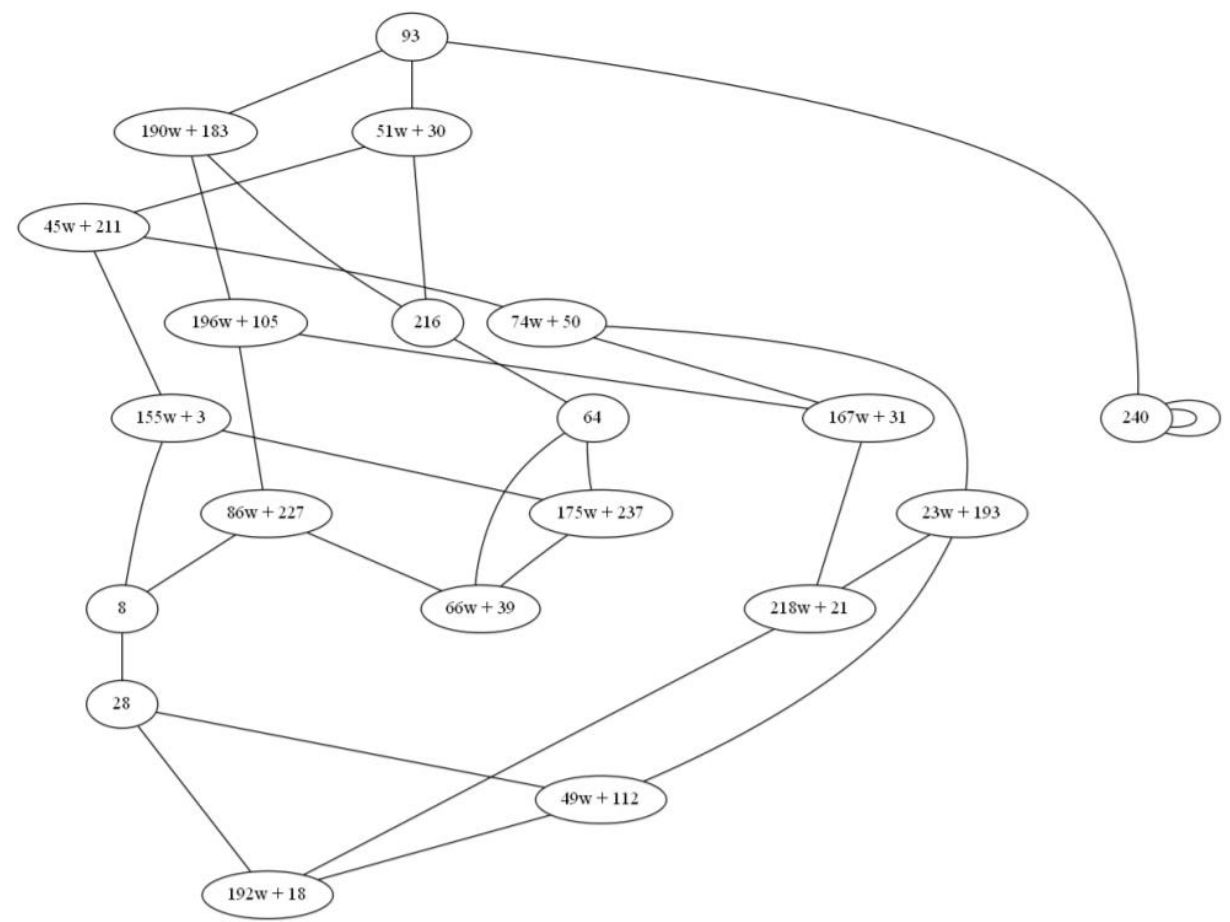
Поле $GF(241^2)$, неприводимый многочлен : $x^2 + 238x + 7$

Для кривых порядка $\#E = 57600 = 2^8 3^2 5^2$

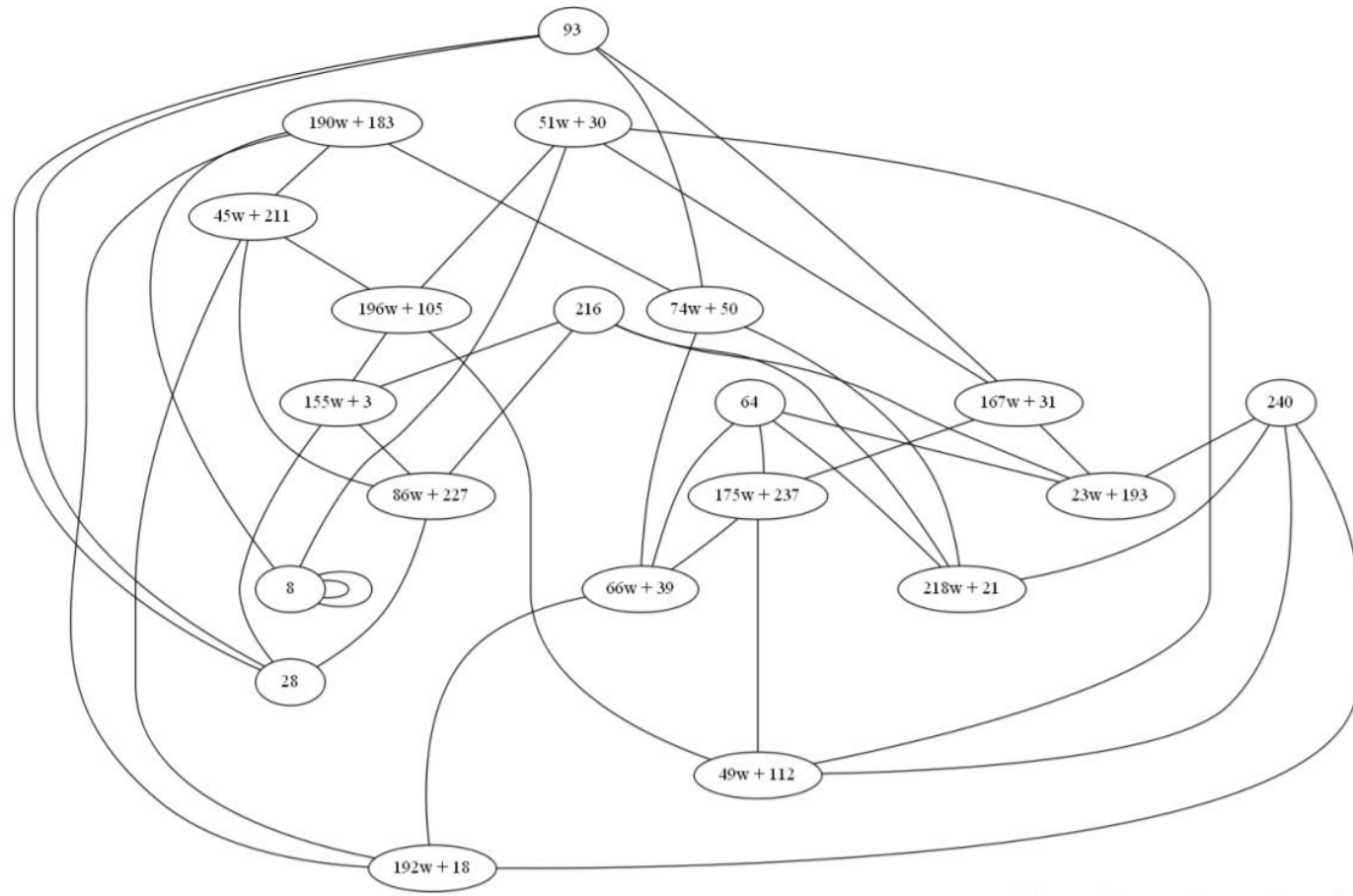
j-инварианты :

93, $51w + 30$, $190w + 183$, 240, 216, $45w + 211$, $196w + 105$, 64, $155w + 3$, $74w + 50$, $86w + 227$, $167w + 31$, $175w + 237$, $66w + 39$, 8, $23w + 193$, $218w + 21$, 28, $49w + 112$, $192w + 18$

Степень изогении = 2



Степень изогении = 3



Подгруппа n-кручения (n-torsion subgroup):

Если при умножении точки P кривой E на n получается точка на бесконечности, то такая точка называется точкой n -кручения (n-torsion point)

Подгруппа n -кручения (n-torsion subgroup) :

$$E[n] = \{ P \in E(\overline{F}_q) : n * P = \infty \}$$

Эта подгруппа состоит из всех точек n -кручения

$E[n]$ изоморфна $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$ (т.е. имеет порядок n^2)

при $n \perp q$

Выбор поля для суперсингулярных кривых

Выбираем поле $GF(p^2)$:

Для $p = l_a^{e_a} l_b^{e_b} f \pm 1$

Выбираем след Фробениуса = $2p$ или $-2p$, чтобы

$$\#E = p^2 + 1 \pm 2p = (p \pm 1)^2$$

$$\text{и } \longrightarrow \#E = (l_a^{e_a} l_b^{e_b} f)^2$$

$E[l_a^{e_a}]$ содержит $l_a^{e_a - 1} (l_a + 1)$ цикл. подгрупп порядка $l_a^{e_a}$

Выбор поля для суперсингулярных кривых

Пусть $l_a = 2$, $l_b = 3$

Характеристика поля : $p = 2^m 3^n f \pm 1$

Где f – небольшое число, 2^m приблизительно равно 3^n

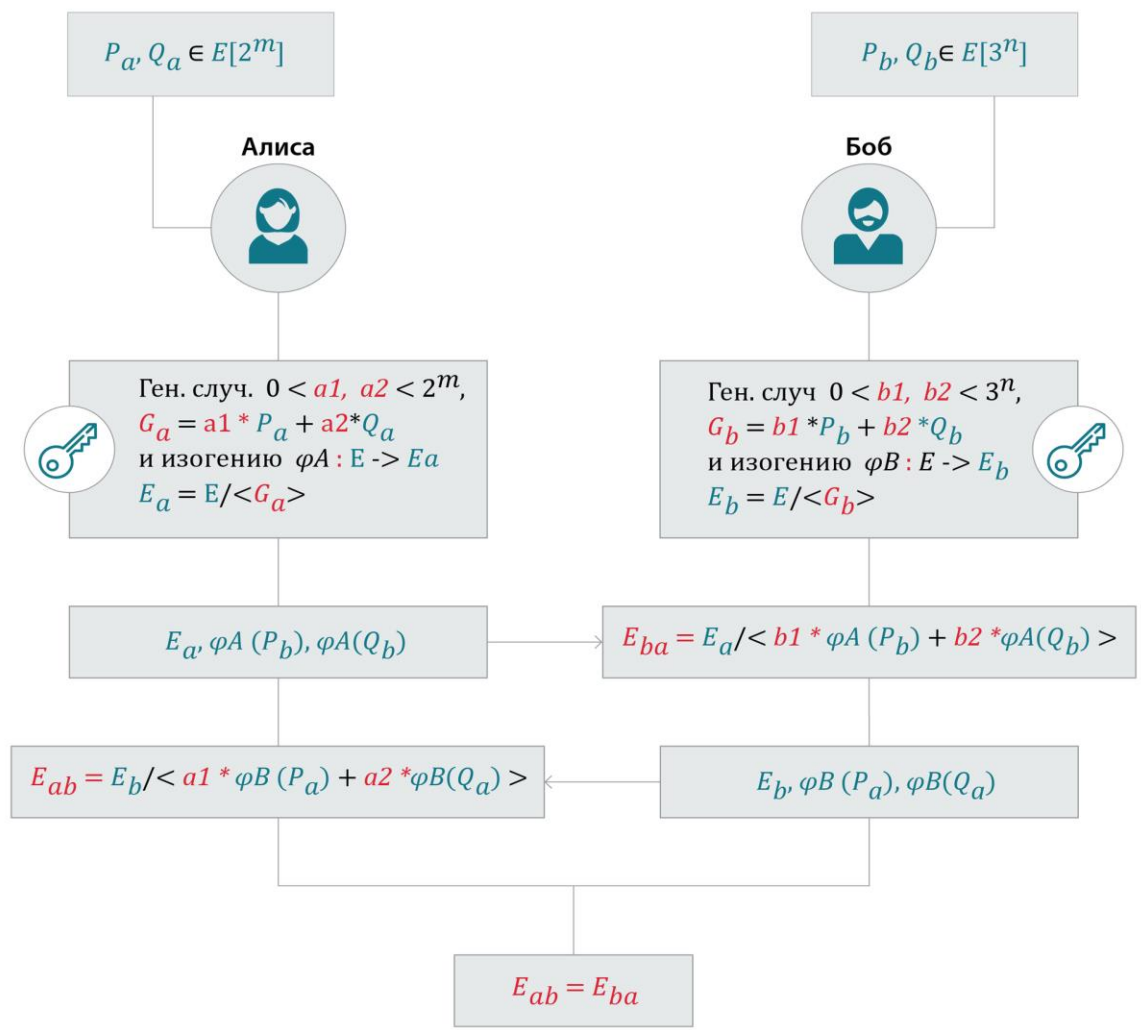
$$\#E = (2^m 3^n f)^2$$

Подгруппы кручения $E[2^m]$ и $E[3^n] \subseteq E(p^2)$

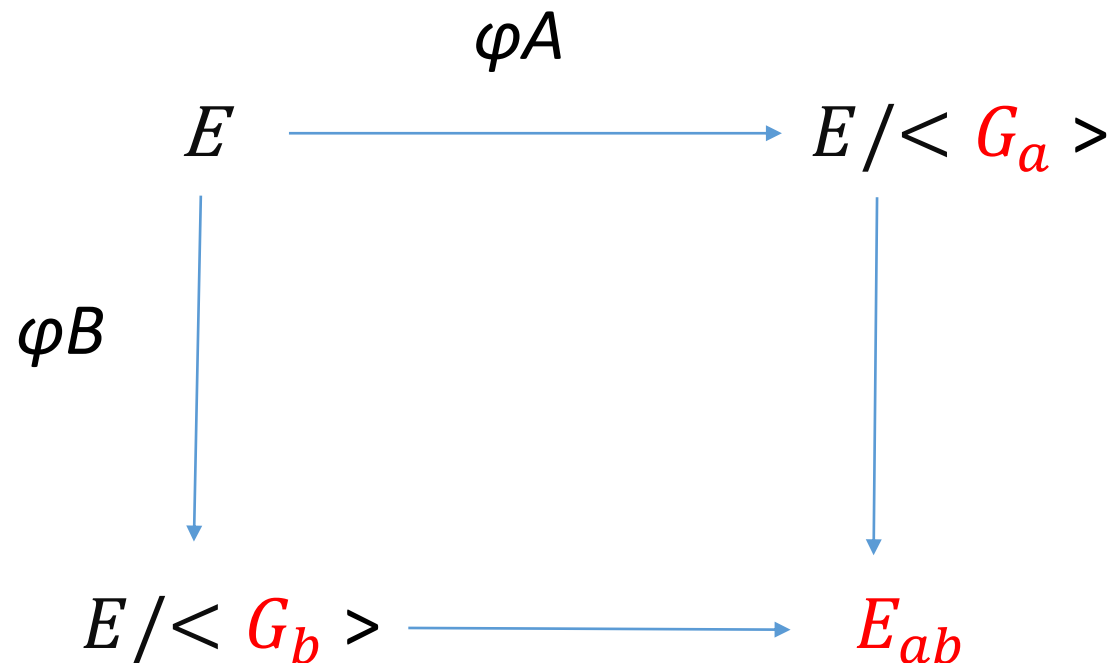
$E[2^m]$ содержит $2^{m-1} (2+1) = 3 * 2^{m-1}$ цикл. подгрупп порядка 2^m

$E[3^n]$ содержит $3^{n-1} (3+1) = 4 * 3^{n-1}$ цикл. подгрупп порядка 3^n

SIDH (Supersingular Isogeny Diffie-Hellman)



Почему работает SIDH ?



$$E_{ab} = E / \langle G_b \rangle / \langle \varphi_B(G_a) \rangle = E / \langle G_a \rangle / \langle \varphi_A(G_b) \rangle$$

Почему работает SIDH ?

Alice:

$$a1 * \varphi_B(P_a) + a2 * \varphi_B(Q_a) = \varphi_B(a1 * P_a) + \varphi_B(a2 * Q_a) = \varphi_B(a1 * P_a + a2 * Q_a) = \varphi_B(G_a)$$

$$E_{ab} = E / \langle G_b \rangle / \langle \varphi_B(G_a) \rangle$$

Bob :

$$b1 * \varphi_A(P_b) + b2 * \varphi_A(Q_b) = \varphi_A(b1 * P_b) + \varphi_A(b2 * Q_b) = \varphi_A(b1 * P_b + b2 * Q_b) = \varphi_A(G_b)$$

$$E_{ba} = E / \langle G_a \rangle / \langle \varphi_A(G_b) \rangle$$

$$E / \langle G_b \rangle / \langle \varphi_B(G_a) \rangle = E / \langle G_a \rangle / \langle \varphi_A(G_b) \rangle$$

Атака на статические ключи (Galbraith-Petit-Shani-Ti)

$G_a = a_1 * P_a + a_2 * Q_a$, где P_a, Q_a имеют порядок 2^m

Пусть $a_1 = 1$ (потеря в безопасности - всего 1 бит!)

$$G_a = P_a + a_2 * Q_a = P_a + a_2 * (Q_a + 2^{m-1} * P_a) ,$$

только в том случае, если a_2 – четное

Атака на статические ключи (Galbraith-Petit-Shani-Ti)

Атакующий отправляет Алисе открытые ключи, содержащие “отравленные” базисы :

Шаг 1:

$$P_a' = P_a$$

$$Q_a' = Q_a + 2^{m-1} * P_a$$

Если удалось установить соединение с Алисой то a_2 – четное, иначе – нечетное !

Атака на статические ключи (Galbraith-Petit-Shani-Ti)

Шаг 2:

Если a_2 – четно ($a_2 = 2a'$):

$$G_a = P_a + a_2 * Q_a = P_a + 2a' * Q_a = P_a + 2a' * (Q_a + 2^{m-2} * P_a)$$

только в том случае, если a' – четное

$$P_a' = P_a$$

$$Q_a' = Q_a + 2^{m-2} * P_a$$

Атака на статические ключи (Galbraith-Petit-Shani-Ti, 2016 г.)

Если a_2 – нечетно ($a_2 = 2a' + 1$):

$$G_a = P_a + (2a' + 1) * Q_a =$$
$$P_a - 2^{m-2} * P_a + (2a' + 1) * (Q_a + 2^{m-2} * Q_a)$$

только в том случае, если a' – четное

$$P_a' = (1 - 2^{m-2}) * P_a$$

$$Q_a' = (1 + 2^{m-2}) * Q_a$$

И.т.д.

Атака на статические ключи (Galbraith-Petit-Shani-Ti, 2016 г.)

Для полного восстановления ключа атакующему необходимо сделать $\log_2(a^2)$ шагов (число бит в закрытом ключе)

Противодействие атаке: проверка Алисой приходящих открытых ключей при помощи метода Fujisaki-Okamoto (увеличивает количество вычислений \sim в 2 раза)

SIKE (Supersingular Isogeny Key Encapsulation)

Доменные параметры :

Начальная кривая E и базиса P_a, Q_a и P_b, Q_b

плюс три хэш-функции: F, G, H

Пара Боба:

открытый ключ $pk_b = \{ E_b, \varphi_B(P_a), \varphi_B(Q_a) \}$

закрытый ключ β : генератор ядра изогении

$E \rightarrow E_b$ — точка $G_b = P_b + \beta * Q_b$

SIKE (Supersingular Isogeny Key Encapsulation)

Алиса (encapsulation):

Генерирует. случ. последовательность m длиной n бит,

где n – длина выхода хэш – функций F, G, H

$$r = G(m, pk_b)$$

Вычисляет изогению $\varphi_A: E \rightarrow E_a$ с ядром $\langle P_a + r * Q_a \rangle$

Вычисляет изогению $\varphi_{AB}: E_b \rightarrow E_{ab}$ с ядром

$$\langle \varphi_B(P_a) + r * \varphi_B(Q_a) \rangle$$

SIKE (Supersingular Isogeny Key Encapsulation)

Алиса (encapsulation):

$$c_1 = F(j(E_{ab}) \text{ xor } m)$$

Результат:

Шифртекст:

$$c = (E_a, \varphi_A(P_b), \varphi_A(Q_b), c_1)$$

Ключ:

$$K = H(m, c)$$

SIKE (Supersingular Isogeny Key Encapsulation)

Боб (decapsulation):

Вход : $c = (E_a, \varphi_A(P_b), \varphi_A(Q_b), c_1)$

Вычисляет изогению $\varphi_{BA} : E_a \rightarrow E_{ba}$ с ядром $\langle \varphi_A(P_b) + \beta^* \varphi_A(Q_b) \rangle$

$m' = F(j(E_{ba}) \text{ xor } c_1)$

$r' = G(m', pk_b)$

изогению $\varphi_{A'} : E \rightarrow E_a'$ с ядром $\langle P_a + r' * Q_a \rangle$

SIKE (Supersingular Isogeny Key Encapsulation)

Боб (decapsulation):

ЕСЛИ $j(E_a) = j(E_a')$ и $\varphi_A(P_b) = \varphi_{A'}(P_b)$ и $\varphi_A(Q_b) = \varphi_{A'}(Q_b)$
результат $K = H(m', c)$

ИНАЧЕ

Ген. случ. посл. s длиной n бит и
результат $K = H(s, c)$

Безопасность алгоритма

	Алиса	Боб
Классическая	$\sqrt{2^m}$	$\sqrt{3^n}$
Квантовая	$\sqrt[3]{2^m}$	$\sqrt[3]{3^n}$

Для успешной атаки надо найти путь хотя бы на одном из графов :

Квантовый уровень безопасности = $\min(\sqrt[3]{2^m}, \sqrt[3]{3^n}) \approx p^{\frac{1}{6}}$

Классический уровень безопасности = $\min(\sqrt{2^m}, \sqrt{3^n}) \approx p^{\frac{1}{4}}$

Размеры ключей

Открытый ключ :

генераторы P и Q группы кручения

коэффициенты A, B кривой

$\sim 8 \log_2 p$ бит

$\sim 6 \log_2 p$ бит (Costello , Crypto 2016)

$\sim 4 \log_2 p$ бит (Azarderakhsh, AsiaPKC 2016 – за счет уменьшения скорости)

Пример 1: длина характеристики поля = 768 бит:

$768/6 = 128$ - битный квантовый уровень безопасности

$768/4 = 192$ - битный классический уровень безопасности

Длина ключа $6 \log_2 p$ бит = 4608 бит = **576** байт

Длина ключа в сжатой форме $4 \log_2 p$ бит = 3072 бит = **384** байт

Размеры ключей

Пример 2: длина характеристики поля = 1536 бит:

$1536 / 6 = 256$ - битный квантовый уровень безопасности

$1536 / 4 = 384$ - битный классический уровень безопасности

Длина ключа $6 \log_2 p$ бит = 9216 бит = 1152 байт

Длина ключа в сжатой форме $4 \log_2 p$ бит = 6144 бит = 768 байт

Реализация для PC

C. Costello и др. (Microsoft Research) “Efficient algorithms for supersingular isogeny Diffie-Hellman” 2016

Результат:

~100 млн. тактов на 3,4 Гц Intel Haswell для одной из сторон
(для 128-битного квантового уровня безопасности: характеристика
 $p = 2^{372} 3^{239} - 1$,
т.е. $p \sim 2^{768}$)

Используется кривые Монтгомери и проективные координаты

Реализация для ARMv7

R. Azarderaksh, D. Jao и др “NEON-SIDH: Efficient implementation of supersingular isogeny Diffie-Hellman Key Exchange protocol on ARM” 2016

Результаты для чипа Beagle Board Black Cortex-A8 на частоте 1 Гц

1,5 сек. для $p \sim 2^{768}$ (128-битного квантового уровня безопасности) :

Если задействовать SIMD-инструкции NEON:

0,2 сек. для $p \sim 2^{768}$ (128-битного квантового уровня безопасности) :

Вопросы



Спасибо за внимание!